

Gruppenübung 4

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die Stabilität der Ruhelage $(0,0)$ des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= 0\end{aligned}$$

mit Hilfe der Funktion $V(x_1, x_2) := \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.

Lösung:

Mit dem Ansatz $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ folgt

$$\dot{V} = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} -x_1^3 \\ 0 \end{pmatrix} = -x_1^4. \quad (1)$$

$\dot{V}$ ist negativ semidefinit, d.h. die Ruhelage $(0,0)$ ist stabil. Wir versuchen die asymptotische Stabilität mit dem Satz von LaSalle zu zeigen, d.h. wir untersuchen $\dot{V} = 0$. Um mit LaSalle auf asymptotische Stabilität zu schließen, dürfen in der Menge $E := \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 = 0\}$ keine ganzen Lösungskurven enthalten sein. Ist x eine Lösung, die identisch in E verläuft, dann ist $x_1 \equiv 0$. Nun folgt aus $x_1 \equiv 0$ nur $\dot{x}_1 \equiv 0$ und das zeigt uns wieder nur $x_1 \equiv 0$, d.h. wir bekommen keine weitere Aussage und damit können wir mit LaSalle keine weitere Aussage treffen.

Tatsächlich sieht man unmittelbar, dass die ganze x_2 -Achse Ruhelagen des System sind und das System entkoppelt ist. D.h. die zweite Koordinate jeder Lösung ist konstant und kann nicht gegen Null konvergieren, was für die asymptotische Stabilität notwendig wäre.

Aufgabe 2 Sei $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit einem strikten Minimum in 0. Betrachten Sie das Newtonsche System

$$\ddot{x} = -\nabla U.$$

Ist 0 eine Ruhelage des Systems? Untersuchen Sie gegebenenfalls die Stabilität dieser Ruhelage.

Lösung:

Da U ein striktes Minimum in 0 hat, muss der Gradient an der Stelle 0 verschwinden, damit hat das System sicher eine Ruhelage bei 0. Um Stabilitätsaussagen machen zu können führt man das System auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung zurück und erhält somit direkt die Zustandsraumdarstellung des Systems. Genauer wählt man z.B. $x_1 = x$ und $x_2 = \dot{x}$ und erhält

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\partial U}{\partial x_1}.\end{aligned} \quad (2)$$

Mit der Linearisierung des Systems kommt man hier nicht weiter, denn betrachtet man

$$Df = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

so erkennt man, dass der Realteil der Eigenwerte selbst dann Null ist, wenn $U''(0) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(0) > 0$. Stattdessen betrachten wir $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$V(x_1, x_2) := \frac{1}{2}x_2^2 + U(x_1) - U(0).$$

Man stellt fest

$$\dot{V} = x_2 \cdot \left(-\frac{\partial U}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right) \cdot x_2 = 0 \quad (4)$$

Der Ursprung ist somit stabil. Man überlege sich anhand eines Beispiels dass die Ruhelage nicht asymptotisch stabil sein muss.

Aufgabe 3 Im folgenden betrachten wir das lineare System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wobei $m < n$ ist. Wir nehmen an dass (A, C) beobachtbar ist und dass die Gleichung

$$A^T P + PA = -C^T C$$

für ein positiv definites P erfüllt ist. Was können Sie über die Stabilität der Ruhelage 0 aussagen?

Lösung:

Der Punkt $x_0 = 0$ ist genau dann eine Ruhelage des Systems, wenn

$$Ax_0 + Bu = 0 + Bu = 0 \quad (5)$$

gilt. Daher wird im Folgenden $Bu = 0$ angenommen.

Wir betrachten die Funktion

$$V(x) = x^T P x. \quad (6)$$

Weil P positiv definit ist, ist auch V positiv definit. Für $\dot{V}$ gilt:

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + PA) x = -x^T C^T C x \leq 0. \quad (7)$$

Damit ist $\dot{V}$ negativ semidefinit und die Ruhelage 0 ist stabil. Wir betrachten jetzt noch $E := \{x \in \mathbb{R}^n | Cx = 0\}$, also die Menge auf der $\dot{V} = 0$ ist und überprüfen, ob es Lösungen gibt die in dieser Menge liegen. Sei x also eine Lösung die identisch in E verläuft. Aus $Cx \equiv 0$ folgt dann $C\dot{x} = CAx \equiv 0$. Genauso erhält man $CA^k x \equiv 0$ für $k \in \{2, \dots, n-1\}$. Insgesamt erhält man also

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x = 0.$$

Die Matrix auf der linken Seite dieses Gleichungssystems ist die Beobachtbarkeitsmatrix. Weil das System gemäß Annahme beobachtbar ist, hat diese Matrix vollen Rang und damit ist $x = 0$ die einzige Lösung des Gleichungssystems. Mit LaSalle können wir also schließlich folgern, dass die Ruhelage 0 asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 4 Wir betrachten ein Pendel der Länge l unter Einfluss der Gravitation wie abgebildet in Abbildung 1. Wir nehmen an, dass die Aufhängung linear gedämpft ist und die Dämpfungskonstante $\tilde{d} \in \mathbb{R}$ nicht-negativ ist.

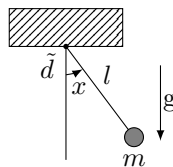


Abbildung 1: Pendel mit Länge l .

a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Systems.

Lösung:

Mit Hilfe der Dralländerung ergibt sich für das dargestellte System:

$$ml^2 \ddot{x} = -mgl \sin x - \tilde{d} \dot{x} \quad (8)$$

- b) Schreiben Sie das System in Zustandsform, wobei als neue Zustände $x_1 = x$ und $x_2 = \frac{1}{\omega}\dot{x}$ mit $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ gewählt werden sollen. Verwenden sie die Abkürzung $d = \frac{\tilde{d}}{ml^2}$ um

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \omega x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega \sin x_1 - d x_2\end{aligned}$$

zu erhalten.

Lösung:

Man normiert (8), dadurch ergibt sich:

$$\ddot{x} = - \underbrace{\frac{g}{l}}_{=\omega^2} \sin x - \underbrace{\frac{\tilde{d}}{ml^2}}_{=d} \dot{x}. \quad (9)$$

Wählt man nun die Zustände wie angegeben ergibt sich:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{x} = \omega x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{\omega}(-\omega^2 \sin x - d\dot{x}) = -\omega \sin x_1 - d x_2.\end{aligned} \quad (10)$$

- c) Bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems.

Lösung:

Um die Ruhelagen des Systems zu bestimmen, bestimmt man die Nullstellen des generierenden Vektorfeldes:

$$0 = \dot{x} = \begin{pmatrix} \omega x_2 \\ -\omega \sin x_1 - d x_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Aus der ersten Zeile von (11) ergibt sich sofort $x_2 = 0$. Damit ergibt sich für x_1 :

$$0 = \sin x_1 \Leftrightarrow x_1 = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

- d) Bestimmen Sie die Stabilitätseigenschaften der Ruhelagen mit der ersten Methode von Lyapunov in Abhängigkeit von d . Bestimmen Sie zusätzlich die Stabilitätseigenschaften der Ruhelage bei $(0,0)$ mit der zweiten Methode von Lyapunov. Achten Sie bei der Wahl der Lyapunovfunktion auf mechanische Eigenschaften des Systems.

Lösung:

Erste Methode von Lyapunov:

Die Linearisierung des Vektorfeldes ergibt:

$$Df|_{(k\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ (-1)^{k+1}\omega & -d \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Das charakteristische Polynom ist somit:

$$\chi(Df|_{(k\pi,0)}) = \lambda^2 + d\lambda + (-1)^k \omega^2 \quad (14)$$

Für gerade k und $d > 0$ ist das charakteristische Polynom ein Hurwitzpolynom, d.h. die Ruhelagen $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ sind asymptotisch stabil. Für ungerade k und $d \in \mathbb{R}$ gibt es einen Eigenwert mit positivem Realteil, damit sind die Ruhelagen $(\pi + 2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ instabil.

Für $d = 0$ ist für die Ruhelage $(0,0)$ keine Stabilitätsaussage durch die Linearisierung möglich. Zweite Methode von Lyapunov:

Die Energie des Systems ist bestimmt durch:

$$E(x) = lmg(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}lmgx_2^2 \quad (15)$$

Bei der Definitheit von V und $\dot{V}$ spielen die positiven Konstanten keine Rolle, deswegen wählt man

$$V(x) = (1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2. \quad (16)$$

Mit diesem Ansatz ergibt sich:

$$\dot{V} = (\sin x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} \omega x_2 \\ -dx_2 - \omega \sin x_1 \end{pmatrix} = -dx_2^2. \quad (17)$$

Damit ergibt sich die Stabilität der Ruhelage bei $(0,0)$. Um asymptotische Stabilität zu gewährleisten benutzt man den Satz von LaSalle. Die Menge unseres Interesses ist $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0\}$. Da wir nur die asymptotische Stabilität von $(0,0)$ nachweisen wollen, betrachten wir allerdings nur $E = \{x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{R} | x_2 = 0\}$ für ein $\varepsilon \in (0, \pi)$. Dies ist ausreichend, da V , zumindest in einer Umgebung des Ursprungs, positiv definit und $\dot{V} \leq 0$ ist, und es daher kompakte invariante Mengen gibt, die den Ursprung enthalten. Aus $x_2 \equiv 0$ folgt $\dot{x}_2 \equiv 0$ und damit $-\omega \sin x_1 - dx_2 \stackrel{x_2 \equiv 0}{=} -\omega \sin x_1 \equiv 0$. Der einzige Punkt in E , der diese Bedingung erfüllt ist $(0,0)$ und somit ist $(0,0)$ nach dem LaSalle'schen Invarianzprinzip asymptotisch stabil.

Im Falle $d = 0$ ist die Ruhelage $(0,0)$ nicht asymptotisch stabil, da $\dot{V} = 0$ ist und die Höhenlinien von V geschlossene Kurven sind.

- e) Bestimmen Sie eine Menge, die zum Einzugsbereich der Ruhelage $(0,0)$ gehört. Zeichnen Sie dazu zuerst mit den vorher berechneten Informationen ein Phasenportrait des Systems. Bestimmen Sie dann die Menge, auf der die Lyapunovfunktion V aus d) positiv und gleichzeitig $\dot{V}$ negativ (semi)definit ist. Ist diese Menge ein Einzugsbereich der Ruhelage? Begründen sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie eine Abschätzung des Einzugsbereichs mit Hilfe dieser Lyapunovfunktion.

Lösung:

Für das Phasenportrait müssen wir nach unseren Stabilitätsuntersuchungen zwei Fälle unterscheiden, nämlich $d = 0$ und $d > 0$.

Im Falle $d = 0$ haben wir festgestellt, dass für $V(x_1, x_2) = (1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$ die Gleichung $\dot{V} = 0$ gilt. D.h. das Vektorfeld verläuft tangential zu den Höhenlinien von V , siehe Abbildung 2

Der gedämpfte Fall ist eine *Störung* des ungedämpften Systems. Wir haben vorher festgestellt, dass sich die Stabilität der Ruhelagen $(2k\pi, 0)$ ändert, so dass diese asymptotisch stabil sind. Die Stabilität der anderen Ruhelagen ändert sich nicht. D.h. wir können zumindest das Phasenportrait um die Ruhelagen skizzieren. Exemplarisch ist ein Phasenportrait in Abbildung 3 dargestellt.

Wir haben vorher schon festgestellt, dass $V = 0$ an den Stellen $(2k\pi, 0)$ gilt. An allen anderen Stellen ist V positiv. Des weiteren haben wir $\dot{V} \leq 0$ berechnet. Dies impliziert allerdings nicht, alle Punkte außer den instabilen Ruhelagen den Einzugsbereich bilden. Aus unseren Berechnungen wissen wir, dass die instabilen Ruhelagen Sattelpunkte sind. D.h. es gibt zwei Kurven, auf denen die Lösungen zu diesen Ruhelagen hin konvergieren.

Um eine Teilmenge des Einzugsbereichs von $(0,0)$ zu bestimmen suchen wir eine kompakte Teilmenge für die Lyapunov und LaSalle die asymptotische Stabilität ergeben. Am einfachsten wählen wir dazu eine Menge die durch eine Höhenlinie von V eingeschlossen wird. Der Einfachheit halber verwenden den wir die Menge $H_1 := \{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R} | V(x) \leq 1\}$. Auf dieser Menge gilt $V(x) > 0$ und $\dot{V} = -dx_2^2 \leq 0$. Da die Lösung $x(t)$ stetig ist, können wir folgern dass H positiv invariant ist. Mit dem Satz von LaSalle folgt, dass das System für alle Anfangsbedingungen in H gegen 0 konvergiert, d.h. H ist eine Teilmenge des Einzugsbereichs. Der Rand von H errechnet sich durch

$$V(x_1, x_2) \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow x_2^2 = 2 \cos x_1.$$

Wählt man $x_1 = t$ erhält man die Parametrisierungen des Randes von H . Genauer hat man die beiden Randkurven

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{2 \cos t} \end{pmatrix} \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ -\sqrt{2 \cos t} \end{pmatrix} \quad (t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$$

In Abbildung 4 ist das Phasenportrait zusammen mit der Teilmenge H des Einzugsbereichs dargestellt.

Anmerkung: Für alle $c \in [0, 2)$ gehört $H_c := \{x \in [-\arccos(1-c), \arccos(1-c)] \times \mathbb{R} | V(x) \leq c\}$, und damit auch $H := \{x \in (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} | V(x) < 2\}$ zum Einzugsbereich der Ruhelage $(0,0)$.

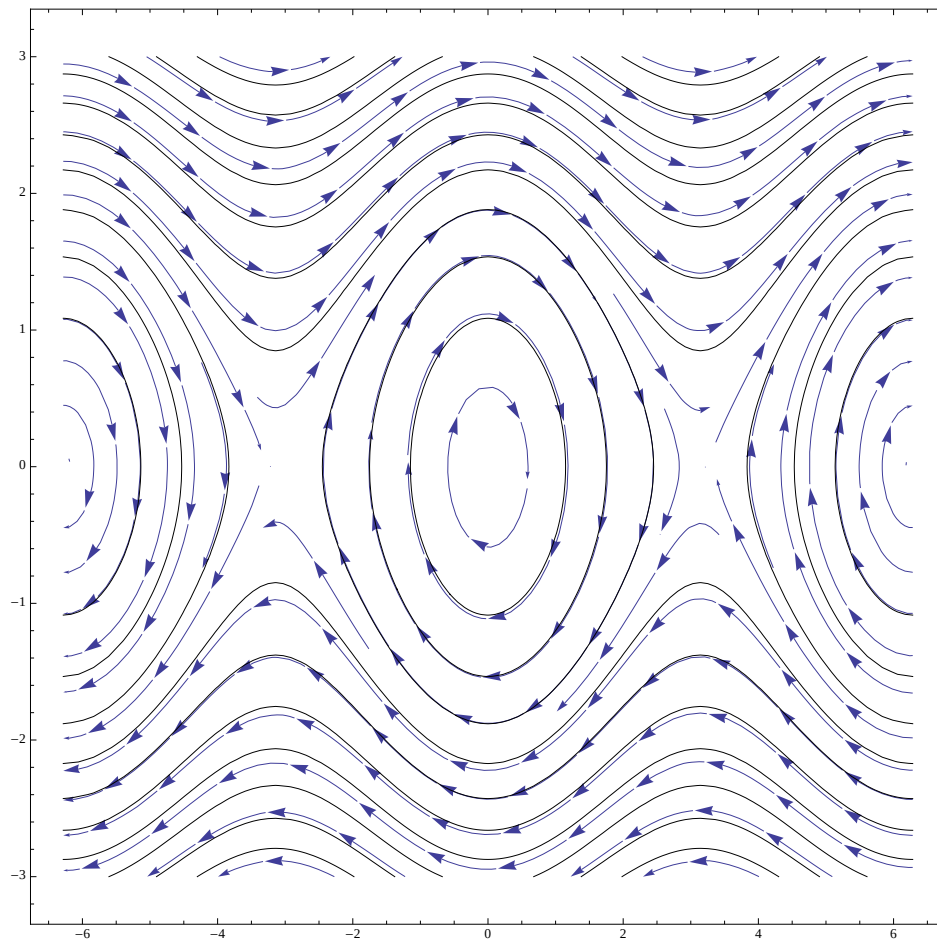


Abbildung 2: Phasenportrait im Falle $d = 0$. Die blauen Pfeile illustrieren das Vektorfeld, die schwarzen Kurven die Höhenlinien von V .

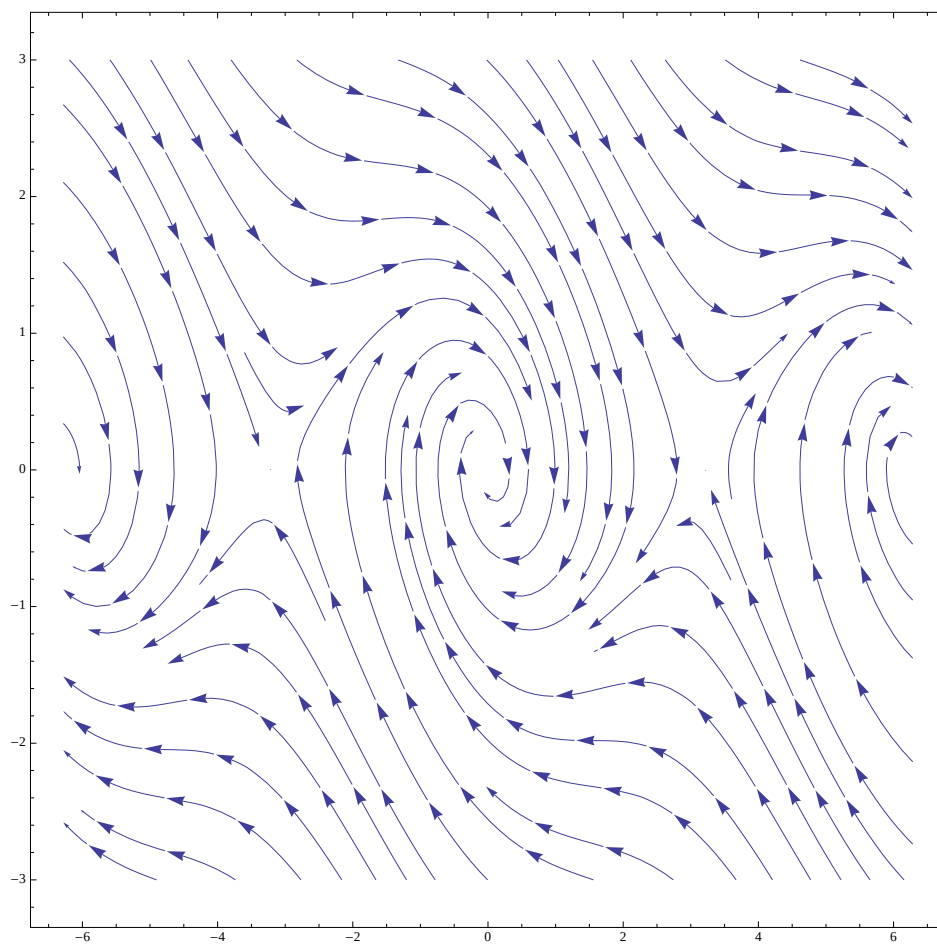


Abbildung 3: Exemplarisches Phasenportrait im Falle $d > 0$.

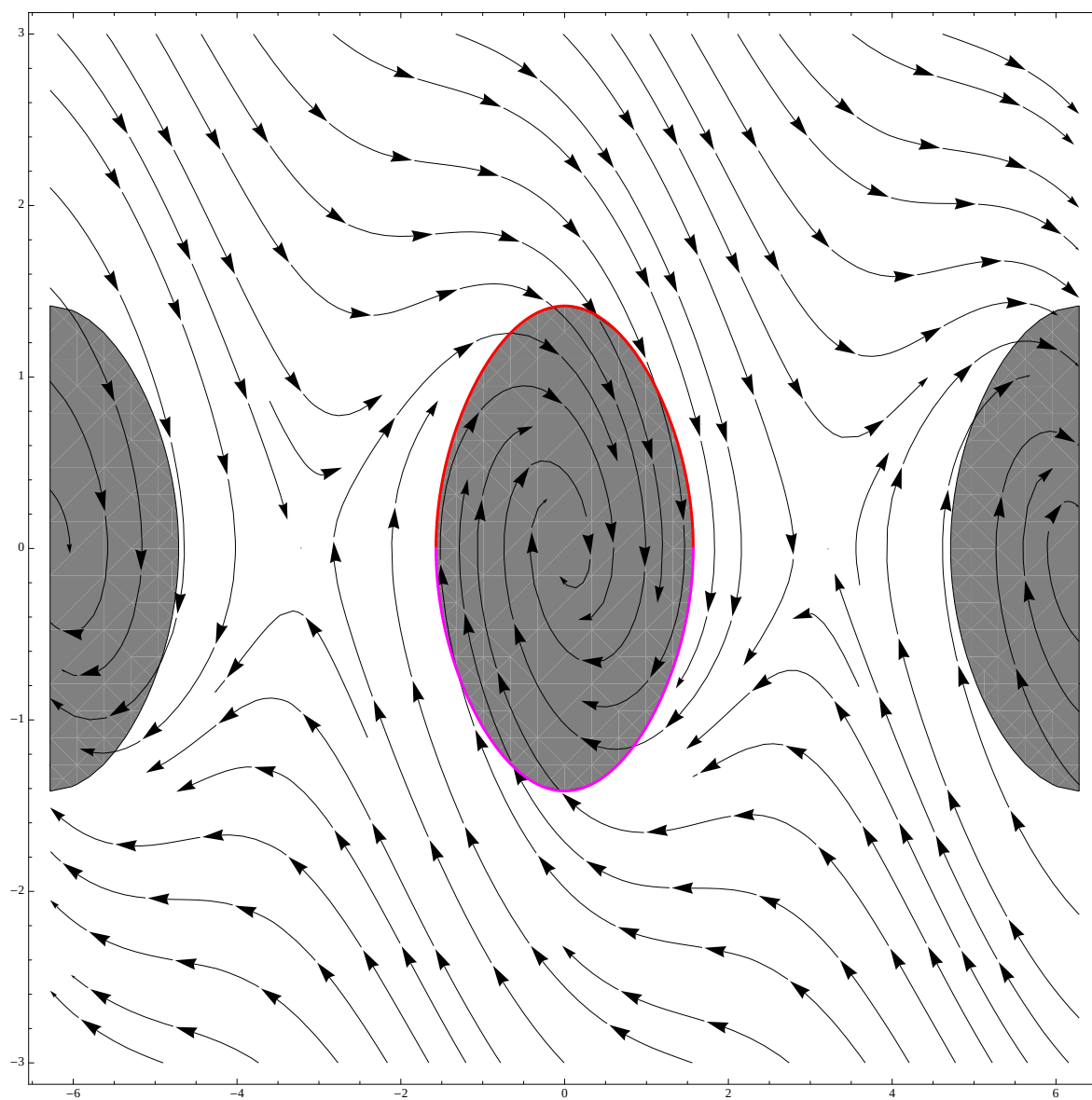


Abbildung 4: Exemplarisches Phasenportrait im Falle $d > 0$ mit grau unterlegter Teilmenge H_1 des Einzugsbereichs. Dabei handelt es sich nicht um den maximalen Einzugsbereich der Ruhelage.